Álgebra Linear e Geometria Analítica

P1: Listas de Exercício

1. Sistemas Lineares
2. Vetores

Profa. Karla Lima
FACET/UFGD

1 Sistemas Lineares 11/03

1.1 Exercícios de Fixação

Exercício 1 *Diga quais das equações a seguir são lineares:*

a) $x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 3$

b) $x - 2y + 3z = 4$

c) $2x_1 + \log x_2 + x_3 = \log 2$

d) $-x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 - x_5 = 0$

e) $\sqrt{3}\,x_1 + \sqrt{2}\,x_2 + x_3 = 5$

f) $x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 10 - 2x_5$

Exercício 2 *Verifique se* $(2, 0, -3)$ *é solução de* $2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -2$.

Exercício 3 *Verifique se* $(1, 1, -1, -1)$ *é solução de* $5x_1 - 10x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$.

Exercício 4 *Encontre uma solução para a equação linear* $2x_1 - x_2 - x_3 = 0$, *diferente da solução* $(0, 0, 0)$.

Exercício 5 *Escreva na forma matricial os seguintes sistemas:*

a)
$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ -x + 2y + 2z = 5 \\ 5x - y + 5z = 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3x - 5y + 4z - t = 8 \\ 2x + y - 2z = -3 \\ -x - 2y + z - 3t = 1 \\ -5x - y + 6t = 4 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x + y - z = 3 - t \\ -x - y - 2z = 1 - 3t \\ 5x + 3z = 7 + t \end{cases}$$

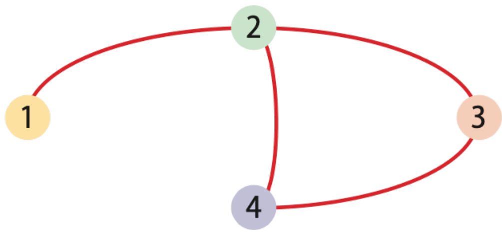
d)
$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ -x + 4y = 1 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} \sqrt{2}\,x - 3y + 2z = 7 \\ 7y - z = 0 \\ 4x + \sqrt{3}\,y + 2z = 5 \end{cases}$$

1.2 Problemas

Exercício 6 *As colegas de sala Ana, Alice e Aurora foram comprar seus livros de Matemática. Alice percebeu que havia esquecido sua carteira. Ana e Aurora pagaram pelos três livros; Ana contribuiu com R\$ 43,00 e Aurora com R\$ 68,00 . Quanto Alice deve pagar para Ana e para Aurora, respectivamente?*

Exercício 7 *O diagrama a seguir representa um mapa rodoviário mostrando as estradas que ligam as cidades* 1, 2, 3 *e* 4.



Podemos representar esse mapa rodoviário na matriz $B = [b_{ij}]_{4\times 4}$, *definida do seguinte modo:*

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \textit{se a cidade } i \textit{ está ligada diretamente à cidade } j, \\ 0 & \textit{se } i = j \textit{ ou se } i \textit{ não tem ligação direta com } j. \end{cases}$$

Por exemplo, $b_{11} = 0$, *pois* $i = j = 1$.

Construa a matriz B.

Exercício 8 *Uma escola fez um levantamento para identificar a quantidade de estudantes matriculados, por sexo e por turno. Observe os resultados obtidos, considerando dois segmentos: Ensino Fundamental e Ensino Médio.*

Quantidade de estudantes matriculados

	Ensino Fundamental		Ensino Médio	
Turno \ Sexo	Masculino	Feminino	Masculino	Feminino
Manhã	340	410	180	152
Tarde	105	87	64	36
Noite	96	134	113	88

a) Organize esses dados em duas matrizes $A_{3\times 2}$ e $B_{3\times 2}$, de modo que a matriz A represente os estudantes do Ensino Fundamental por turno e sexo, e a matriz B represente os estudantes do Ensino Médio por turno e sexo.

b Determine a matriz $C = A + B$. O que essa matriz C representa?

Exercício 9 *As mensagens entre duas agências de espionagem, Gama e Rapa, são trocadas usando uma linguagem de códigos, onde cada número inteiro entre* 0 *e* 25 *representa uma letra, conforme mostra a tabela a seguir:*

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
7	10	22	9	5	4	18	2	17	25	23	12	14

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
8	1	19	15	20	21	11	3	16	24	6	13	0

A agência Gama enviou para a Rapa o nome de um espião codificado na matriz

$$A = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Para decodificar uma palavra de cinco letras, dada por uma matriz A, de ordem 5×1 formada por inteiros entre 0 e 25, deve-se multiplicá-la pela matriz de conversão:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 20 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e, usando-se a tabela dada, converter os números em letras.

Utilizando-se esse processo, conclui-se que o nome do espião é:

a) DIEGO

b) SHUME

c) SADAN

d) RENAN

e) RAMON

Exercício 10 *Uma fábrica de camisetas utiliza três tipos de tecido (Algodão, Poliéster e Elastano) na produção de dois modelos de camisetas, conforme indicado na tabela.*

	Modelo A	Modelo B
Algodão	3	2
Poliéster	1	2
Elastano	2	1

A fábrica recebeu o seguinte pedido para os próximos três meses:

	Janeiro	Fevereiro	Março
Modelo A	100	120	150
Modelo B	80	100	90

a) Escreva a matriz $T_{3\times 2}$ que representa a quantidade de tecido usada em cada modelo.

b) Escreva a matriz $P_{2\times 3}$ que representa a quantidade de camisetas produzidas em cada mês.

c) Calcule o produto $T \cdot P$ e interprete o resultado.

Exercício 11 *Uma indústria de sucos produz dois tipos de bebidas: Suco Natural e Suco Light. Para cada litro produzido são utilizados três ingredientes: fruta, açúcar e água.*

	Natural	Light
Fruta	4	3
Açúcar	2	1
Água	3	4

A produção planejada para três semanas é:

	Semana 1	Semana 2	Semana 3
Natural	200	250	300
Light	150	200	250

a) Construa a matriz A que representa os ingredientes por tipo de suco.

b) Construa a matriz B que representa a produção semanal.

c) Determine $A \cdot B$.

d) Interprete o significado da segunda coluna da matriz obtida.

2 Sistemas Lineares 18/03

2.1 Exercícios de Fixação

Exercício 12 *Seja* $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 11 \end{bmatrix}$.

a) Verifique qual das matrizes abaixo é a sua inversa:

$$\text{(i)} \begin{bmatrix} -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \qquad \text{(ii)} \begin{bmatrix} -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \qquad \text{(iii)} \begin{bmatrix} -\frac{11}{2} & -\frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

b) Resolva o sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 = -1 \\ 5x_1 + 11x_2 = -1 \end{cases}$$

Exercício 13 *Seja* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Verifique qual das matrizes abaixo é a sua inversa:

$$\text{(i)} \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad \text{(ii)} \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad \text{(iii)} \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

b) Resolva o sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 7 \\ 4x_1 + 9x_2 + x_3 = 21 \end{cases}$$

Exercício 14 *Em cada parte, suponha que a matriz aumentada de um sistema de equações lineares tenha sido reduzida à dada forma escalonada por meio de operações elementares sobre as linhas. Resolva o sistema.*

(a)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 5 \end{array}\right]$$

(b)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Exercício 15 *Usando o Método de Eliminação de Gauss-Jordan, resolva os sistemas abaixo:*

a)

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = 0 \\ -x + 2y - 3z = 0 \\ x + y + 4z = 0 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

d)

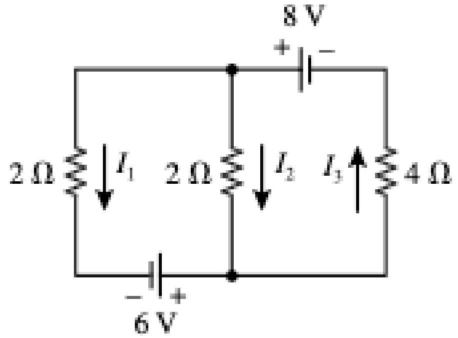
$$\begin{cases} v + 3w - 2x = 0 \\ 2u + v - 4w + 3x = 0 \\ 2u + 3v + 2w - x = 0 \\ -4u - 3v + 5w - 4x = 0 \end{cases}$$

2.2 Problemas

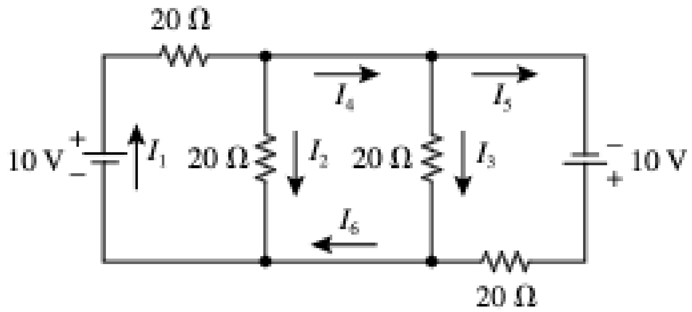
Exercício 16 *Leia e compreenda os exemplos sobre circuitos elétricos disponível neste arquivo Circuitos Elétricos.*

Exercício 17 *Em cada item, analise os circuitos elétricos dados encontrando as correntes desconhecidas.*

a)



b)



3 Vetores 30/03

3.1 Exercícios de Fixação

Exercício 18 *Sejam* $\mathbf{u} = (-3, 1, 2)$*,* $\mathbf{v} = (4, 0, -8)$ *e* $\mathbf{w} = (6, -1, -4)$*. Calcule:*

1. $\mathbf{v} - \mathbf{w}$
2. $-\mathbf{v} + \mathbf{u}$
3. $-3(\mathbf{v} - 8\mathbf{w})$
4. $(2\mathbf{u} - 7\mathbf{w}) - (8\mathbf{v} + \mathbf{u})$

Exercício 19 *Sejam* $\mathbf{u} = (-3, 2, 1, 0)$*,* $\mathbf{v} = (4, 7, -3, 2)$ *e* $\mathbf{w} = (5, -2, 8, 1)$*. Calcule:*

1. $\mathbf{v} - \mathbf{w}$
2. $2\mathbf{u} + \mathbf{v}$
3. $-\mathbf{u} + (\mathbf{v} - 4\mathbf{w})$
4. $-\mathbf{v} - \mathbf{w}$

Exercício 20 *Sejam* $\mathbf{u}$*,* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *os vetores do exercício anterior. Encontre* $\mathbf{x}$ *tal que:*

$$5\mathbf{x} - 2\mathbf{v} = 2(\mathbf{w} - 5\mathbf{x})$$

Exercício 21 *Sejam* $\mathbf{u} = (5, -1, 0, 3, -3)$, $\mathbf{v} = (-1, -1, 7, 2, 0)$ *e* $\mathbf{w} = (-4, 2, -3, -5, 2)$. *Calcule:*

1. $\mathbf{w} - \mathbf{u}$
2. $2\mathbf{v} + 3\mathbf{u}$
3. $3\mathbf{w} + 3(\mathbf{v} - \mathbf{u})$
4. $\frac{1}{2}(\mathbf{w} - 5\mathbf{v} + 2\mathbf{u}) + \mathbf{v}$

Exercício 22 *Sejam* $\mathbf{u} = (1, 2, -3, 5, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 4, -1, 1, 2)$ *e* $\mathbf{w} = (7, 1, -4, -2, 3)$. *Calcule:*

1. $\mathbf{v} + \mathbf{w}$
2. $3(2\mathbf{u} - \mathbf{v})$
3. $(3\mathbf{u} - \mathbf{v}) - (2\mathbf{u} + 4\mathbf{w})$

Exercício 23 *Sejam* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *os vetores do exercício anterior. Encontre* $\mathbf{x}$ *tal que:*

$$3\mathbf{u} + \mathbf{v} - 2\mathbf{w} = 3\mathbf{x} + 2\mathbf{v}$$

4 Equações da Reta e do Plano

Exercício 24 *Encontre as equações vetoriais e paramétricas das retas que satisfazem as condições abaixo.*

a) Passa pelo ponto $P_0(0, 1)$ e é paralela ao vetor $\mathbf{v} = (-2, 4)$.

b) Passa pelos pontos $P_0(0, 0)$ e $P_1(3, 5)$.

c) Passa pelos pontos $P_0(1, -1, 1)$ e $P_1(2, 1, 1)$.

Exercício 25 *Encontre uma equação geral e uma equação vetorial do plano que passa pelos pontos* $P = (1, 2, 4)$, $Q = (1, -1, 6)$ *e* $R = (1, 4, 8)$.

Exercício 26 *Mostre que a reta de equações paramétricas* $x = 0$, $y = t$ *e* $z = t$:

a) está contida no plano $6x + 4y - 4z = 0$ (ou seja, todos os pontos da reta estão no plano);

b) é paralela ao plano $5x - 3y + 3z = 1$.

Exercício 27 *Seja* π *o plano que passa pelos pontos* $P_1 = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$, $P_2 = \left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$ *e* $P_3 = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

(a) Determine a equação geral do plano π.

(b) Determine a equação paramétrica do plano π.

(c) Determine a equação vetorial do plano π.